Matrizen Lösungen

9. Mathe Nacht

1.Aufgabe / Lösung:

A: A ist nicht die Nullmatrix, $\Rightarrow \text{Rang}(A) > 0$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0 \;\Rightarrow \text{Rang}(A) \neq 2$$

A ist nicht invertierbar $\Rightarrow \text{Rang}(A) = 1$

B:

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -4 - 4 = -8 \;\Rightarrow\; \text{B ist invertierbar} \Rightarrow \text{Rang}(B) = 2$$

C: C ist nicht invertierbar, da nicht quadratisch
1.Zeile und 2.Zeile von C linear unabhängig $\Rightarrow \text{Rang}(C) = 2$

$(AB)^2$:

$$\det((AB)^2) = \det(ABAB) = \det(A)\det(B)\det(A)\det(B) = 0 \cdot (-8) \cdot 0 \cdot (-8) = 0$$

$\Rightarrow (AB)^2$ nicht invertierbar

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ -32 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}((AB)^2) = 1$$

CC^T:

$$\det(CC^T) = \det\begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 15 & 18 \end{pmatrix} = 252 - 225 = 27 \neq 0 \;\Rightarrow CC^T \text{ invertierbar, } \text{Rang}(CC^T) = 2$$

BC:

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -2 \\ 0 & -11 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ nicht invertierbar, da nicht quadratisch, $\text{Rang}(BC) = 2$

2.Aufgabe / Lösung:

1. Möglichkeit:

$$\det(A) = a^2 + 1 - 2a = (a-1)^2$$

Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihr Determinante ungleich 0 ist. A ist also genau dann invertierbar, wenn $a \neq 1$ gilt.

<u>2. Möglichkeit:</u> Eine 3×3 Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihr Rang 3 ist. Mit Gauß-Elimination bringt man die Matrix auf Dreiecksform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 2a - a^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Dabei ist der Eintrag $2a - a^2 + 1 = (a-1)^2$ genau für $a \neq 1$ von Null verschieden so, dass A genau für diese Werte vollen Rang hat.

<u>Inverse berechnen für a=2</u>

1. Zeile und 2. Zeile tauschen:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \text{-1} & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

2.Zeile $+(-1)\cdot$1.Zeile:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \text{-1} & 0 \\ 0 & 2 & \text{-1} & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3.Zeile + $(-2)\cdot$ 2.Zeile:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \text{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \text{-1} & \text{-2} & 2 & 1 \end{array}$$

1.Zeile+2$\cdot$ 3.Zeile:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \text{-4} & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \text{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \text{-1} & \text{-2} & 2 & 1 \end{array}$$

$(-1)\cdot$3.Zeile:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \text{-4} & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \text{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \text{-2} & \text{-1} \end{array}$$

Dann ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

3.Aufgabe / Lösung:

Bestimmung von $a \in \mathbb{R}$ so, dass Rang(A) =Rang(A^{-1}). Wenn A invertierbar ist, so muss Rang$(A) = 3$ gelten und $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = 2a - 24 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow a = 12$$

$\Rightarrow A$ für $a \in \mathbb{R} \backslash \{12\}$ invertierbar und es gilt Rang(A) =Rang(A^{-1})

4.Aufgabe / Lösung:

A: Die ersten beiden Zeilen von A sind linear abhängig

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$$

In diesem Fall sind dann aber die 2. und 3. Zeile linear unabhängig, denn $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = -\frac{19}{3} \neq 0$
A hat also stets Rang 2.

B:

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & b & 3 \\ 0 & 1-3b & b-9 \\ 0 & -2-b & 0 \end{pmatrix} = (b+2)(b-9),$$

also $\det(B) \neq 0$ für $b \neq -2$ oder $b \neq 9$. In diesem Fall ist also Rang von B 3.
Für $b = 2$:

$$\mathrm{Rang}(B) = \mathrm{Rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Für $b = 9$:

$$\mathrm{Rang}(B) = \mathrm{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 0 & -26 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

C: Die ersten drei Spalten von C sind linear unabhängig, denn

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

und damit ist $\mathrm{Rang}(C) = 3$.

5.Aufgabe / Lösung:

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Kern}(A^T) = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Bild}(A^T) = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{Bild}(B) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{Kern}(B^T) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{Bild}(B^T) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}\right\}$$

6.Aufgabe / Lösung:

(a) Es gilt:

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

Damit ist $A^T A$ symmetrisch.

(b) Nachrechnen:

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T,$$

d.h. $A + A^T$ ist symmetrisch

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T),$$

d.h. $A - A^T$ ist schiefsymmetrisch.

c) Sei AB symmetrisch, so gilt $AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$, da A und B symmetrisch sind. Also folt $AB = BA$.
Gelte nun $AB = BA$. So folgt

$$AB = A^T B^T = (BA)^T = (AB)^T,$$

also ist AB symmetrisch.

7.Aufgabe / Lösung:

(a) **wahr:** Für jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}))$ erhält man aus der Symmetrie der Einheitsmatrix

$$(A^{-1}A)^T = (E_n)^T = E_n,$$

also ist $A^T(A^{-1})^T = E_n$ und damit $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ und wenn A symmetrisch ist : $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$.

(b) **wahr:** A invertierbar $\Rightarrow AA^{-1} = E_n$, also $(A^{-1})^T A^T = E_n$ so, dass $(A^{-1})^T$ das Inverse von A^T ist.

(c) **falsch:** E_n und $-E_n$ sind invertierbar, ihre Summe $E_n + (-E_n) = 0_n$ aber nicht.

(d) **wahr:** $B^{-1}A^{-1} \cdot AB = E_n$ also $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

8. Aufgabe / Lösung:

(a) Mit $T := S^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ ist $B = TAS$, also sind A und B äquivalent.

(b) $B = S^{-1}AS \quad \Rightarrow$

$$\det(B) = \det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \det(A)\det(S^{-1}S) = \det(A)$$

Umkehrung ?

im Allgemeinen falsch: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dann gilt: $\det(A) = 1 = \det(B)$, $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B) \Rightarrow A, B$ äquivalent, aber $S^{-1}AS = A \neq B$ für alle $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$

Lineare Gleichungssysteme Lösungen

9. Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Voraussetzung:

Gegeben seien das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

sowie die Matrix $B := \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $c := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Behauptung:

a) Das Gleichungssystem umgeschrieben ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} * x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der Koeffizientenmatrix $\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ und dem Ergebnisvektor $\text{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da b nicht der Nullvektor ist, liegt hier ein inhomogenes Gleichungssystem vor.

b) Die erweitere Koeffizientenmatrix (A, b) ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ihr Rang ist 3, die Lösungsmenge ist einelementig und das Gleichungssystem ist universell lösbar.

c) $B * x = c$ ist äquivalent zu:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & & & + & 8x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

d) Das Gleichungssystem aus Aufgabe 1c) ist nicht universell lösbar und die Lösungsmenge ist $L = \left\{\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2a\\a\\a\end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$.

Beweis:

b) Um den Rang von (A, b) zu bestimmen, formen wir sie zunächst in eine Dreiecksform um:

1) Zuerst multiplizieren wir die erste Zeile mit -2 (EZ2) und erhalten: $\begin{pmatrix}-2 & -6 & -2 & -2\\ 2 & 5 & 1 & 0\\ 4 & 6 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

2) Dann Addieren wir die erste Zeile auf die zweite Zeile (EZ1): $\begin{pmatrix}-2 & -6 & -2 & -2\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 4 & 6 & 2 & 1\end{pmatrix}$

3) Multiplizieren dann die erste Zeile mit 2 (EZ2): $\begin{pmatrix}-4 & -12 & -4 & -4\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 4 & 6 & 2 & 1\end{pmatrix}$ und addieren anschließend die erste Zeile auf die vierte Zeile (EZ1): $\begin{pmatrix}-4 & -12 & -4 & -4\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & -6 & -2 & -3\end{pmatrix}$

4) Nun multiplizieren wir die zweite Zeile mit -6: $\begin{pmatrix}-4 & -12 & -4 & -4\\ 0 & 6 & 6 & 12\\ 0 & -6 & -2 & -3\end{pmatrix}$ und addieren dann die zweite auf die dritte Zeile: $\begin{pmatrix}-4 & -12 & -4 & -4\\ 0 & 6 & 6 & 12\\ 0 & 0 & 4 & 9\end{pmatrix}$.

Die erweiterte Koeffizientenmatrix hat also Rang 3, genauso wie A selbst. Mit Satz 6.2 aus der Vorlesung wissen wir nun, dass $A * x = b$ lösbar ist, mit Satz 6.6 sogar eindeutig lösbar und mit Satz 6.4 wissen wir, dass das Gleichungssystem universell lösbar ist, bzw. da wir eine quadratische Koeffizientenmatrix gegeben haben, wissen wir das auch mit Satz 6.7 (i).

d) Durch Probieren erhält man, dass eine Lösung

$$u_0 := \begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

ist. Nun wollen wir das dazugehörige HLGS lösen und formen dazu die Matrix B in eine Dreiecksform um: (Die Umformungen können wir bei dem Ergebnisvektor weglassen, da sich beim Nullvektor nichts durch EZ1 - EZ4 (bzw. ES1 - ES4)) ändert.

1) Wir multiplizieren zuerst die erste Zeile mal 2, die zweite Zeile mal -3 und kommen von $\begin{pmatrix}6 & 4 & 8\\ 4 & 0 & 8\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix}12 & 8 & 16\\ -12 & 0 & -24\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ und addieren anschließend die erste Zeile auf die zweite Zeile: $\begin{pmatrix}12 & 8 & 16\\ 0 & 8 & -8\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

2) Jetzt multiplizieren wir die dritte Zeile mit -12 und erhalten: $\begin{pmatrix} 12 & 8 & 16 \\ 0 & 8 & -8 \\ -12 & -12 & -12 \end{pmatrix}$ und addieren die erste auf die dritte Zeile: $\begin{pmatrix} 12 & 8 & 16 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

3) Zuletzt multiplizieren wir die dritte Zeile mit 2: $\begin{pmatrix} 12 & 8 & 16 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$ und addieren die zweite auf die dritte Zeile: $\begin{pmatrix} 12 & 8 & 16 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Wir können jetzt sehen, dass das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist, da der Rang von A nicht 3 ist, sondern 2, dasselbe Argument gilt als Begründung dafür, wieso es nicht universell lösbar ist.

Das umgeformte Gleichungssystem sieht jetzt so aus:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 12x_1 & + & 8x_2 & + & 16x_3 & = & 0 \\ & & 8x_2 & + & (-8)x_3 & = & 0 \end{array}$$

Es gibt jetzt zwei Möglichkeiten um zu unserer Behauptung zu kommen:

1) Errate eine Lösung des HLGS:

$$v_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sehe, dass mit Satz 6.5(i) aus der Vorlesung v_1 bereits den Teilraum L_0 aufspannt (denn $dim(L_0) = 3 - \text{Rang}(B) = 3 - 2 = 1$, also ist $\text{span}\{v_1\} = L_0$ und damit ist die Lösungsmenge L insgesamt $\{u_0 + a \cdot v_1 / a \in \mathbb{R}\}$.

2) Stelle die letzten Gleichungen noch um:
Wir erhalten einmal aus $8x_2 + (-8)x_3 = 0$, dass $x_2 = x_3$ gilt, und das in die erste Gleichung $12x_1 + 8x_2 + 16x_3 = 0$ eingesetzt, ergibt: $12x_1 + 24x_2 = 0$, also $x_1 = -2x_2$, also ist

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -2a \\ a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

und mit Satz 6.5(ii) folgt nun die Behauptung wie gewünscht.

2. Aufgabe :

Voraussetzung:

Gegeben seien die Linearen Gleichungssysteme

a)
$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & = & 8 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & 5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & tx_3 & = & 1 \end{array}$$

Behauptung:

a) Die Lösungsmenge des ersten Gleichungssystems ist $L = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Die Lösungsmenge des zweiten Gleichungssystems ist $L = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1+4a \\ -4a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$.

c) Die Lösungsmenge des dritten Gleichungssystems ist $L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-5}{13+t} \\ \frac{4}{(13+t)} \\ \frac{1}{13+t} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}, t \neq -13 \right\}$.

Beweis:

a) Zunächst bringen wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ in Dreiecksform:

1) Zuerst multiplizieren wir die zweite Zeile mit -2 und addieren anschließend die erste auf die zweite Zeile: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2) Dann multiplizieren wir die dritte Zeile mit -2 und addieren anschließend die erste auf die dritte Zeile: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

3) Jetzt multiplizieren wir die dritte Zeile mit -2 und addieren dann die zweite Zeile auf die dritte Zeile: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$.

Wir können jetzt schon erkennen, dass die Lösungsmenge einelementig ist, da die Koeffizientenmatrix vollen Rang hat.

Wir erhalten nun: $-6x_3 = 6$, also $x_3 = -1$, dann anschließend: $4x_2 + 6 \cdot (-1) = 2$, umgeformt: $4x_2 = 8$, also $x_2 = 2$ und damit: $2x_1 + 4 \cdot 2 - 8 = 8$, also $2x_1 = 8$, daraus folgt $x_1 = 4$. Das heißt die Lösungsmenge des Gleichungssystems aus a) ist $L = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Wir bringen wieder die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in Dreiecksform:

1) Wir multiplizieren zuerst die erste Zeile mit -2 und addieren anschließend die erste Zeile auf die zweite Zeile: $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Jetzt multiplizieren wir die dritte Zeile mit 2 und addieren dann die zweite auf die dritte Zeile: $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Wir können sehen, dass das LGS aus b) zwar universell lösbar ist, da der Rang der Koeffizientenmatrix 3 ist, aber nicht eindeutig lösbar ist, da der Rang nicht 4 ist.

Wir haben nun: $2x_3 + 8x_4 = 0$, also $x_3 = -4x_4$ und $-2x_2 + 8x_4 = -2$, also $-2x_2 = -2 - 8x_4$, und umgeformt ergibt das: $x_2 = 1 + 4x_4$. Und zuletzt: $-2x_1 - 4(1 + 4x_4) - 4(-4x_4) = -2 \Leftrightarrow -2x_1 - 4 - 16x_4 + 16x_4 = -2 \Leftrightarrow -2x_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = -1$, also ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 + 4a \\ -4a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Wir formen wieder die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & t & 1 \end{pmatrix}$ in eine Dreiecksform:

1) Zuerst multiplizieren wir die erste Zeile mit -2 und addieren anschließend die erste Zeile auf die zweite Zeile: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ -1 & 2 & t & 1 \end{pmatrix}$.

2) Jetzt multiplizieren wir die erste Zeile mit $-\frac{1}{2}$ und addieren anschließend die erste auf die dritte Zeile: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 5 + t & 1 \end{pmatrix}$

3) Nun multiplizieren wir die zweite Zeile noch mit -1 und addieren dann die zweite Zeile auf die dritte Zeile: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 13+t & 1 \end{pmatrix}$.

Jetzt hat die Koeffizientenmatrix die Dreiecksform erreicht und damit das Gleichungssystem lösbar ist, muss nun die Koeffizientenmatrix Rang 3 haben, da die erweiterte Koeffizientenmatrix Rang 3 hat (unabhängig von t) (Satz 6.2). Das heißt es muss gelten $13 + t \neq 0$, also $t \neq -13$. Jetzt können wir für $t \in \mathbb{R}, t \neq -13$ das LGS auflösen: Wir erhalten: $(13 + t)x_3 = 1$, also $x_3 = \frac{1}{13+t}$, das eingesetzt in $-2x_2 + 8x_3 = 0$ ergibt: $-2x_2 + 8(\frac{1}{13+t}) = -2x_2 + \frac{8}{13+t} = 0 \Leftrightarrow -2x_2 = -(\frac{8}{13+t}) \Leftrightarrow x_2 = (\frac{8}{(13+t)2}) = \frac{4}{(13+t)}$. Das eingesetzt in $x_1 + 5x_3 = 0$ ergibt: $x_1 + \frac{5}{13+t} = 0$, also $x_1 = \frac{-5}{13+t}$.

Das heißt die Lösungsmenge L des LGS aus c) ist:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-5}{13+t} \\ \frac{4}{(13+t)} \\ \frac{1}{13+t} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}, t \neq -13 \right\}$$

3. Aufgabe:

Voraussetzung:

Es seien $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Behauptung:

a) $A_1 * x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist lösbar.

b) $A_2 * x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist unlösbar, aber $A_2 * x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist lösbar.

Beweis:

a) $A_1 * x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eindeutig lösbar, da $\left(A_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ Rang 2 hat, genauso wie A_1 selbst. (Satz 6.2 + Satz 6.6)

b) $A_2 * x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist unlösbar, da A_2 Rang 2 hat, $\left(A_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ hat jedoch Rang 3 (Satz 6.2). $A_2 * x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eindeutig lösbar, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, damit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in im(A_2)$, sodass mit Satz 6.2 und Satz 6.6 wieder die Behauptung folgt.

4. Aufgabe :

Voraussetzung:

Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} * x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Behauptung:

a) Die Lösungsmenge L_0 des HLGS (1) ist ein $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^3$.

b) Der Teilraum L_0 des HLGS (1) hat die Dimension 0.

c) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist die Lösungsmenge von $A*x = 0_{\mathbb{R}^3}$ ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^3$.

Beweis:

a) Die Lösungsmenge L_0 eines HLGS ist mit Satz 6.5(i) ein $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^3$.

b) Mit Satz 6.5(i) aus der Vorlesung wissen wir, dass gilt $dim(L_0) = 3 - Rang(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix})$, das heißt wir müssen zunächst den Rang dieser Matrix bestimmen. Mit Sarrus ist $Det\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right) = (4 \cdot 5) + (3 \cdot 3) + 0 - 0 - 1 - (5 \cdot 2 \cdot 3) = -2 \neq 0$, also wissen wir mit einem Resultat aus der Vorlesung, dass die Matrix vollen Rang hat (also Rang 3), sodass folgt: $dim(L_0 = 3 - Rang(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}) = 3 - 3 = 0$ und das war zu zeigen.

c) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist die Lösungsmenge von $A*x = 0_{\mathbb{R}^3}$ ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^3$, denn der Rang von A ist 1, sodass mit der Formel aus Satz 6.5(i) folgt: $dim(L_0) = 3 - 1 = 2$.

Determinanten Lösungen

9. Mathe Nacht

1.Aufgabe / Lösung:

a) Determinante nach 1. Spalte entwickeln

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \cdot \det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} - 0 + (-2)\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\ &= 1\cdot(1\cdot 1-(-1)\cdot 1) - 2\cdot((-1)\cdot(-1)-2\cdot 1)\\ &= 2-2+4 = 4\end{aligned}$$

Damit ist $\mathrm{Rang}(A) = 3 \neq 2$.

b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ist eine Lösung, da

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}$$

und wegen $\det(A) \neq 0$ gibt es genau eine Lösung.

c)

$$A + B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

Die ersten beiden Zeilen sind linear abhängig, damit gilt $\det(A+B) = 0$.

d)

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B) = \det(B\cdot A)$$

Nach $a)$ ist $\det(A) = 4$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\\ &= 0 - 1\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\ &= -(3-3) + (1-2) = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

also gilt $\det(A\cdot B) = 0 = \det(B\cdot A)$

2.Aufgabe/Lösung:

a) Entwickle z.B. nach der 4. Zeile

$$\det(A) = 8 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entwickle $\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ z.B. nach der 3. Zeile dann gilt

$$\det(B) = 8 \cdot 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 8 \cdot 6 \cdot (-24) = -1152$$

b) Tausche Spalte 2 und 3 und dann Zeile 2 und 3, dann hat die Matrix die Form

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

mit Determinante $\det(B) = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^2 = 121$

c) Tausche Spalten 2 und 4 und dann Zeilen 1 und 3, dann hat die Matrix die Form

$$\begin{pmatrix} 8 & i & 5 & 5 \\ 0 & 16 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 32 & i \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

mit Determinante $\det(C) = (-1)^2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 = 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 = 2^{18} (= 262144)$

d) Entwickle nach der 1. Spalte

$$\begin{aligned} \det(D) &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x & 5 \\ 5 & y \end{pmatrix} - f \cdot \det \begin{pmatrix} e & \pi \\ 5 & y \end{pmatrix} + g \cdot \det \begin{pmatrix} e & \pi \\ x & 5 \end{pmatrix} \\ &= (xy - 25) + (5\pi f - efy) + (5eg - \pi gx) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Wähle z.B $x = 5 = y$ und $f = 0 = g$.

3.Aufgabe/Lösung:

Es ist

$$A = \begin{pmatrix} \hat{A} & & & \\ & \hat{A} & & \\ & & \dots & \\ & & & \hat{A} \end{pmatrix} \text{ mit } \hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt $\det(\hat{A}) = -2$. Dann gilt $\det(A) = (-2)^n$ Also ist $\det(A) > 0$ genau dann, wenn n gerade ist.

4.Aufgabe/Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\det(A) &= 2\cdot\det\begin{pmatrix}2&7\\a&2\end{pmatrix} - a\cdot\det\begin{pmatrix}a&7\\a&2\end{pmatrix} + 7\cdot\det\begin{pmatrix}a&7\\2&7\end{pmatrix}\\ &= 2\cdot(4-7a) - a^2\cdot(-5) + 7\cdot(7a-14)\\ &= 8-14a+5a^2+49a-98 = 5a^2+35a-90 \overset{!}{=} 0\\ &\Leftrightarrow a_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}+18}\end{aligned}$$

Für $a \in \mathbb{R}\backslash\{a_1, a_2\}$ ist $\det(A) \neq 0$. Damit ist die Cramersche Regel (Satz 7.34) anwendbar. Bezeichne mit A_i die Matrix mit b anstelle der $i-$ten Spalte. Dann ist die eindeutig bestimmte Lösung des LGS $A\,x = b$ gegeben durch

$$x = \left(\frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \frac{\det(A_3)}{\det(A)}\right).$$

Es gilt:

$$\det(A_1) = 3\cdot(4-7a) + 1(-5a) + a\cdot/7a-14) = 12-21a-5a+7a^2-14a = 7a^2-40a+12,$$

$$\det(A_2) = (-3)\cdot(2a-49) - 1\cdot(4-49) - a(14-7a) = -6a+147+45-14a+7a^2 = 7a^2-20a+192,$$

und

$$\det(A_3) = 3\cdot(a^2-14) + 1(-5a) + a(4-a^2) = 3a^2-42-5a-a^3+4a = -a^3+3a^2-a-42.$$

Also ist

$$x = \left(\frac{7a^2-40a+12}{5a^2+35a-90}, \frac{7a^2-20a+192}{5a^2+35a-90}, \frac{-a^3+3a^2-a-42}{5a^2+35a-90}\right).$$

b) Suche Abbildungsmatrix für f:

$$\begin{aligned}f(1,0,0,0) &= (1,0,0,0) =: a_1^T\\ f(0,1,0,0) &= (0,1,0,0) =: a_2^T\\ f(0,0,1,0) &= (-1,1,2,0) =: a_3^T\\ f(0,0,0,1) &= (3,-2,-2,1) =: a_4^T\end{aligned}$$

Ist $f(x,y,z,t) = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ für $A = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&3\\0&1&1&-2\\0&0&2&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-z+3t & y+z-2t & 2z-2t & t\end{pmatrix} = f(x,y,z,t)$$

Die Urbilder von e_1, e_2, e_3, e_4 unter f sind die Lösungen der LGS $A\,x_i = e_i,\ i = 1,2,3,4$.
Wir dürfen die Cramersche Regel (Satz 7.34) anwenden, da $\det(A) = 1\cdot1\cdot2\cdot1 \neq 0$ ist.

e_1:

$$\det(A_1) = \det(A) = 2$$

$$\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_4) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = (1, 0, 0, 0)$$

e_2: Analog :

$$\det(A_1) = 0$$

$$\det(A_2) = \det(A) = 2$$

$$\det(A_3) = \det(A_4) = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = (0, 1, 0, 0)$$

e_3:

$$\det(A_1) \overset{4.Zeile}{=} 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{1.Spalte}{=} 1 \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det(A_2) \overset{4.Zeile}{=} 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{1.Spalte}{=} 1 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det(A_3) \overset{4.Zeile}{=} 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det(A_4) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 0)$$

e_4: Analog : $x_4 = (-2, 1, 1, 1)$

(A_i ist die Matrix A mit $e_j, j = 1, 2, 3, 4$ anstelle der i-ten Spalte)

Eigenwerttheorie Lösungen

9. Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$$

a) Bestimme die Eigenwerte von A!

Lösung: Zunächst bestimmen wir das charakteristische Polynom von A:

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & x-3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x+1 & -3 \\ -4 & -1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= (x+1) \cdot \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ 0 & x-3 & 0 \\ -4 & -1 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (x+1) \cdot ((x-1)(x-3)(x-2) - 12(x-3)) \\ &= (x+1)(x-3)\,((x-1)(x-2) - 12) \\ &= (x+1)(x-3)(x^2 - 3x - 10) = (x+1)(x-3)(x-5)(x+2) \end{aligned}$$

Somit hat A die Eigenwerte: $-1, 3, 5$ und -2.

b) Begründe, warum A diagonalisierbar ist!

Lösung: A hat vier verschiedene Eigenwerte. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, findet man also vier linear unabhängige Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$, die somit eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden. Diese Basis besteht aus Eigenvektoren von A und somit ist A diagonalisierbar.

c) Bestimme eine Basis von $\mathbb{R}^4$, die aus Eigenvektoren von A besteht!

Lösung: Da es vier verschiedene Eigenwerte gibt und die Summe der Dimensionen aller Eigenräume maximal 4 und in diesem Fall, weil A diagonalisierbar ist, genau 4 ergibt, hat jeder Eigenraum die

Dimension 1. An der Matrix kann man deshalb ablesen (siehe 3. Spalte):

$$\mathrm{Eig}(A,-1) = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \}$$

Somit ist $v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1.

Nun bestimmen wir den **Eigenraum zum Eigenwert** 3. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Eig}(A,3) = \ker & \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \\
&= \{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d \\ -d \\ \frac{1}{2}d \\ d \end{pmatrix} \mid d \in \mathbb{R} \}
\end{aligned}$$

Somit ist $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **ein Eigenvektor zum Eigenwert** 3**.**

Nun bestimmen wir den **Eigenraum zum Eigenwert** 5. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Eig}(A,5) = \ker & \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -3 \\ -4 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -3 \\ -4 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \\
&= \{ \begin{pmatrix} \frac{3}{4}d \\ 0 \\ \frac{1}{2}d \\ d \end{pmatrix} \mid d \in \mathbb{R} \}
\end{aligned}$$

Somit ist $v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ **ein Eigenvektor zum Eigenwert** 5**.**

Als letztes bestimmen wir den **Eigenraum zum Eigenwert** -2. Es ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Eig}(A,-2) &= \ker \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ -4 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ -4 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ -3d \\ d \end{pmatrix} \mid d \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

Somit ist $v_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **ein Eigenvektor zum Eigenwert** -2**.**

Dann ist $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$, die aus Eigenvektoren besteht.

d) Gib eine Matrix W an, für die $W^{-1}AW$ eine Diagonalmatrix ist. Wie sieht diese Diagonalmatrix aus?

Lösung: Laut Vorlesung erfüllt die folgende Matrix W, deren Spalten die Eigenvektoren sind, die gewünschte Eigenschaft:

$$W := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Diagonalmatrix sieht dann wie folgt aus:

$$D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe:

Es sei $C := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 27 & -2 & -49 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -101 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(6, \mathbb{R})$

a) Gib drei Eigenwerte von C an!

Lösung: An der zweiten, vierten und sechsten Spalte kann man ablesen: -2, 4 und 0 sind Eigenwerte von C.

b) Entscheide (mit Begründung), welche der folgenden Vektoren Eigenvektoren von C sind!

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, v_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,$$
$$v_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, v_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Lösung: Die Vektoren v_1 und v_2 sind Eigenvektoren, denn es gilt

$$C \cdot v_1 = -2 \cdot v_1$$

und

$$C \cdot v_2 = 4 \cdot v_2$$

Die Vektoren v_3 und v_4 sind keine Eigenvektoren, denn es gilt

$$C \cdot v_3 = (3, 27, 6, -101, 4, 9)^T$$

und dies ist kein Vielfaches von v_3 und

$$C \cdot v_4 = (1, 0, 0, 8, 0, 0)^T$$

und dies ist kein Vielfaches von v_4.

3. Aufgabe:

Es sei $B := \begin{pmatrix} 4 & a-1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimme, für welche Zahlen $a \in \mathbb{R}$ die Matrix B diagonalisierbar ist!

Lösung: *Behauptung:* Nur für $a = 1$ ist B diagonalisierbar.
Beweis: Zunächst bestimmen wir das charakteristische Polynom von B und die Eigenwerte:

$$\chi_B(x) = ... = (x-4)^2(x-1)$$

Somit sind 4 und 1 die einzigen Eigenwerte von B. Um Aussagen über die Diagonailisierbarkeit treffen zu können, bestimmen wir die Dimensionen der Eigenräume. Es ist

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Eig}(B,4)) &= \dim(\ker(4E - B)) = 3 - \mathrm{Rang}(4E - B) \\ &= 3 - \mathrm{Rang} \begin{pmatrix} 0 & -a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist

$$\mathrm{Rang} \begin{pmatrix} 0 & -a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{für } a = 1 \\ 2 & \text{für } a \neq 1 \end{cases}$$

Somit ist die Dimension von $\mathrm{Eig}(B,4)$ gleich 2, wenn $a = 1$ ist und 1, wenn $a \neq 1$ ist.
Für die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert 1 gilt:

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Eig}(B,1)) &= \dim(\ker(E - B)) = 3 - \mathrm{Rang} \begin{pmatrix} -3 & -a+1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert 1 ist immer 1 und somit unabhängig von a.
Damit B diagonalisierbar ist, muss gelten:

$$\dim(\mathrm{Eig}(B,4)) + \dim(\mathrm{Eig}(B,1)) = \dim(\mathbb{R})^3 = 3$$

Dies ist nur dann erfüllt, wenn $\dim(\mathrm{Eig}(B,4)) = 2$, also $a = 1$ ist.

4. Aufgabe:

a) Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ und A habe den Eigenwert $3i$. Weiter sei w ein Eigenvektor zum Eigenwert $3i$. Zeige, dass dann auch jedes Vielfache $\lambda \cdot w$, mit $\lambda \in \mathbb{C}$, ein Eigenvektor zu $3i$ ist!

Lösung: Da w ein Eigenvektor zum Eigenwert $3i$ ist, gilt $A \cdot w = 3i \cdot w$. Sei weiter $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$A \cdot (\lambda w) = \lambda \cdot (A \cdot w) = \lambda \cdot (3i \cdot w) = 3i \cdot (\lambda w)$$

Somit ist auch λw ein Eigenvektor zum Eigenwert $3i$.

b) Es sei $B \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$ und 0 sei ein Eigenwert von B. Zeige, dass dann der Rang von $B - 4E$ (E ist die Einheitsmatrix in $\mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$) maximal 3 ist! Welche Eigenwerte hat B, wenn $\mathrm{Rang}(B - 4E) = 0$ ist?

Lösung: Ist 0 ein Eigenwert von B, so folgt nach Vorlesung, dass $\ker(B) \neq \{0\}$ ist. Das heißt, die Dimension von $\ker(B)$ ist mindestens 1. Nach Dimensionsformel gilt

$$\dim(\ker(B)) + \mathrm{Rang}(B) = 4$$

Daraus folgt also $\mathrm{Rang}(B) = 4 - \dim(\ker(B)) \leq 3$.

Ist $\mathrm{Rang}(B - 4E) = 0$, so folgt daraus $\dim(\ker(B)) = 4$. Daraus folgt $\ker(B) = \mathbb{R}^4$. Das bedeutet, dass für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^4$ gilt: $B \cdot v = 0$. Somit ist jeder Vektor $v \in \mathbb{R}, v \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. 0 ist also der einzige Eigenwert von B.